ÜRETİM

TEORİSİ

Bir girişimde bulunulan işin maliyeti, o işi yapmak için vazgeçilen diğer işlerin getirisiyle ölçülür. Buna fırsat maliyeti diyoruz. Örneğin bir girişimci meyve toplama işinin 1 saatinden 7.60 $ kazanabileceğini varsayalım. Dolayısıyla bu kişi reçel yapımıyla uğraşırsa, her bir saat için meyve toplama işinin fırsat maliyeti 7.60 $ olacaktır. Eğer bu kişi her hafta pazartesi sabahı 5 saat reçel üretirse, toplam fırsat maliyeti 38 $ olur. Girişimci birey haftanın geri kalan günlerinde reçel yapımında kullanılmak üzere meyve toplayabilir. Bu durum yatırımın özünü oluşturur.

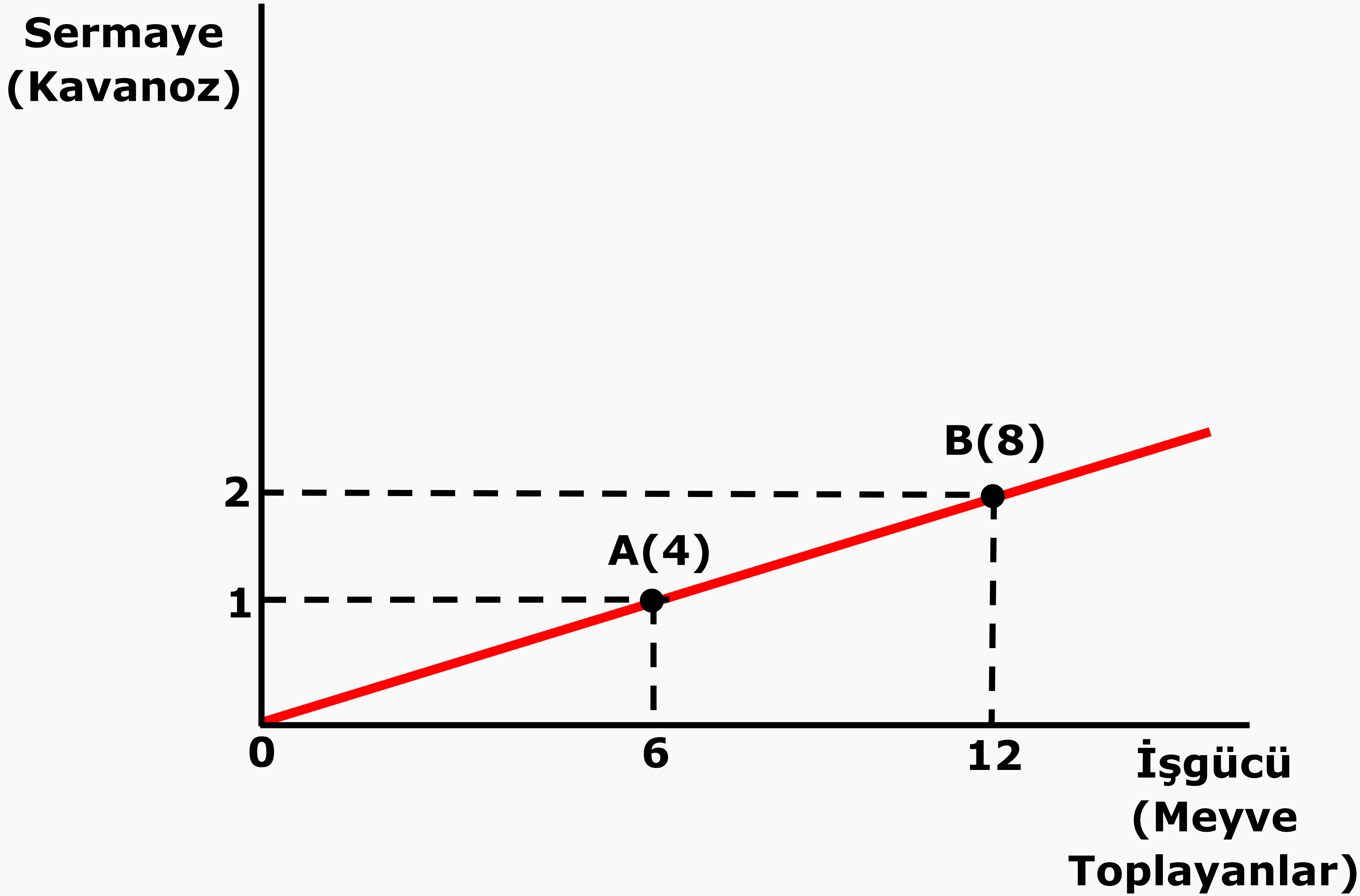
Diğer yandan birey sermaye piyasasından bir haftalık süre için 38 $ borçlanarak, Pazartesi günü gerçekleştirdiği reçel yapımını, haftanın diğer günleri meyve toplamaksızın finanse edebilir. Yani meyve piyasasından 38 $ meyve satın alır. Ancak bir hafta sonra, aldığı borcu faiziyle birlikte geri ödemek zorundadır.

Eğer reçel üreticisi birey bir işletme kurmak isterse, meyve toplama işinden haftada 190 $ gelir elde edebilir. Bu parayı kazanmadıkça da, girişimi başlatmaz.

Bu gelir, reçel yapımı, meyve ve diğer üretim giderlerini karşılamaktadır. Bu nedenle 190 $ reçel üretim işinin toplam fırsat maliyetidir. Biz kavrama aynı zamanda normal kâr adını da veriyoruz. Bu gelirin üzerindeki herhangi bir kâr, aşırı kâr olarak tanımlanmaktadır.

Örnek girişimcinin 45 cm^3 kavanoz ve 6 meyve toplayıcısıyla haftada ortalama 4 kilo reçel ürettiğini varsayalım. Ayrıca üretimdeki bu girdileri iki katına çıkarttığında, üretim miktarının da (çıktı) iki kat arttığını kabul edelim. Bu üretim süreci Şekil 3.1'de gösterilmiştir.

Şekil 3.1. Üretim Tekniği

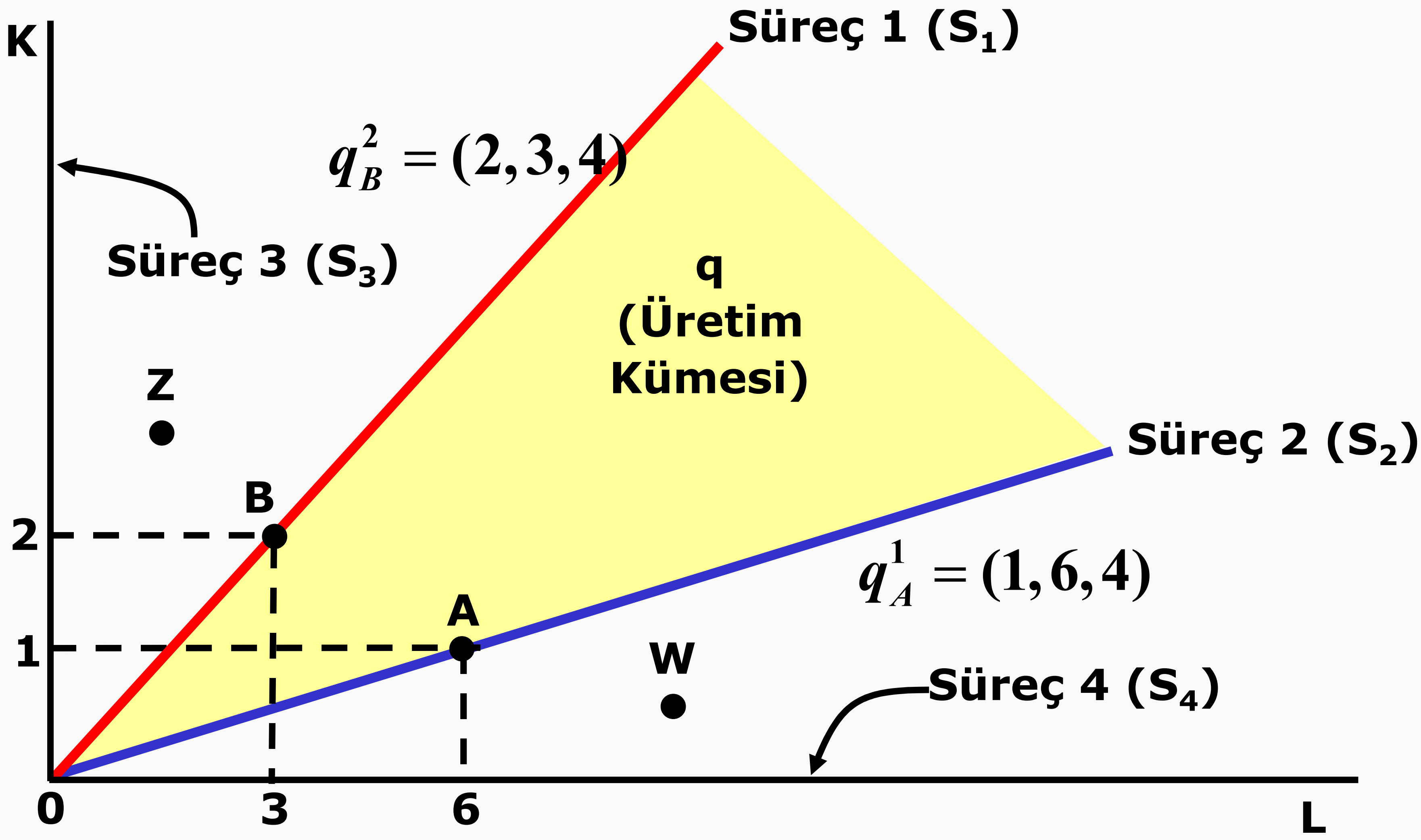


Birinci durumda 1 birim sermaye-6 birim işgücü kullanılarak, 4 birim reçel üretilmiştir. Aynı şekilde ikinci durumda 2 birim sermaye-12 birim işgücü kullanılarak, 8 birim reçel üretilmiştir. Her iki üretim sürecinde kullanılan sermaye-işgücü oranı 1/6 'dır. Her iki üretim sürecinde sermaye-işgücü oranı sabit kaldığından, biz bu üretim sürecini doğrusal olarak tanımlıyoruz.

Bundan sonra sermayeyi K, işgücünü de L harfleriyle gösterelim.

Reçel üreticisi için 2 farklı üretim tekniğini kullanabilme olanağının bulunduğunu varsayalım. Ayrıca Şekil 3.2'de 3 ve 4 süreçleri de gösterilmiştir. Ancak bu süreçler yapılabilir değildir. Kavanoz olmaksızın yalnızca meyveyle ve meyve olmaksızın yalnızca kavanozla reçel üretilemez. Dolayısıyla hem işgücü hem de sermayeye birlikte ihtiyaç vardır. Şekilde S_2 işgücü yoğun, S_1 de sermaye yoğun üretim süreçlerini göstermektedir.

Şekil 3.2. Üretim Tekniği Seçenekleri



Üretim Tekniği, belirli bir ürünün üretilebilmesine olanak sağlayan tüm üretim süreçlerini kapsar. Olanaklı tüm üretim süreçleri, **üretim kümesi** olarak adlandırılmaktadır. Yukarıdaki şekilde kırmızı doğularla gösterilen iki üretim sürecinin (vektörünün) arasında çok sayıda yapılabilir teknoloji vardır. Örneğin $q_A^1 = (1,6,4)$ ve $q_B^2 = (2,3,4)$. W ve Z yapılabilmesi olanaklı olmayan durumları göstermektedir.

Bir olanaklı üretim kümesinin tanımlanabilmesi için, teknolojiyle ilgili şu varsayımların yapılması gereklidir.

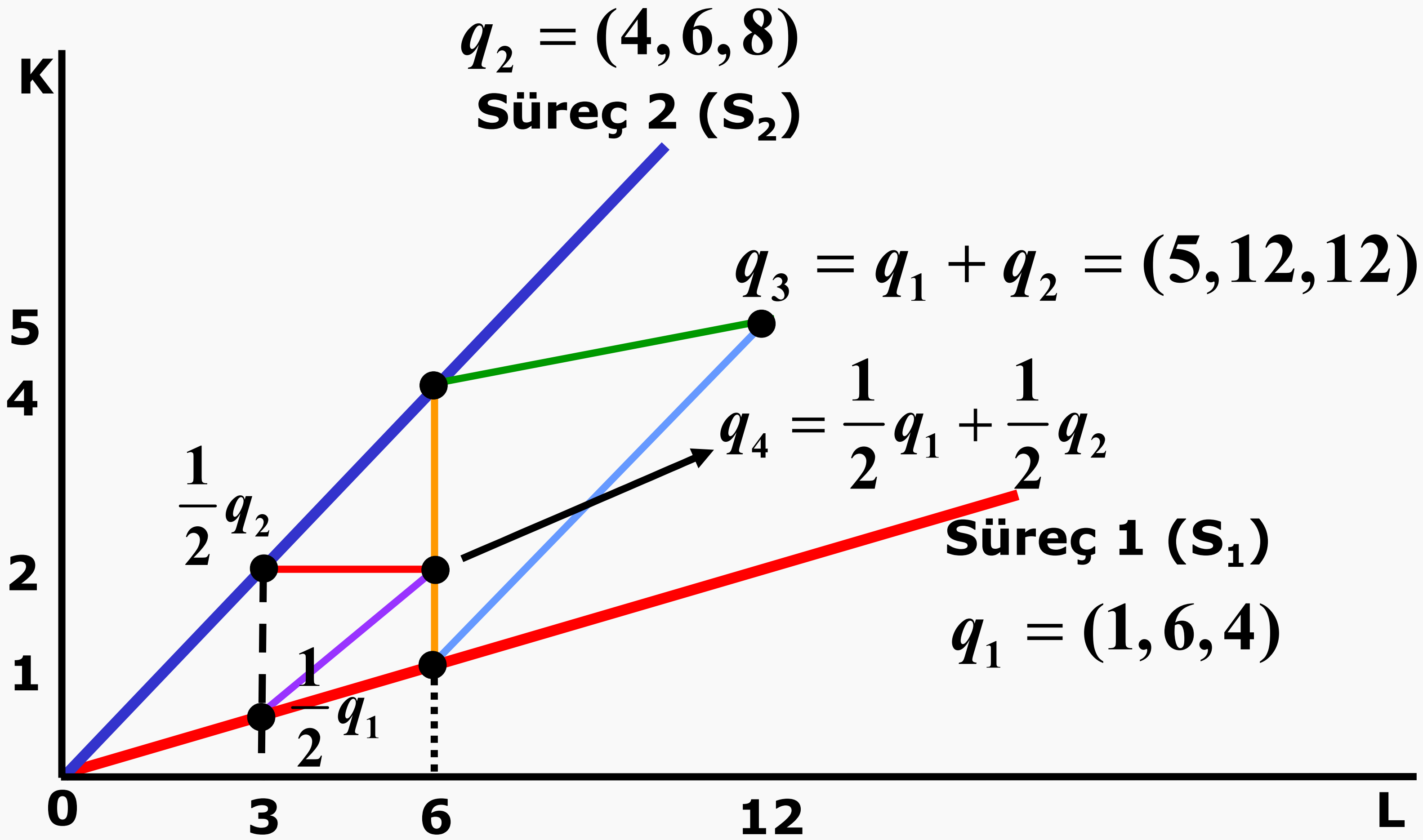
1. q **üretim kümesinde,** $y_K > 0$**,** $y_L > 0$ **ve** $b > 0$ **'dır. Yani girdi kullanmazsak, çıktı elde edemeyiz:** $q = (q_K, q_L, b)$

2. Üretim süreci tersine çevrilemez. Yani 1 birim sermaye, 6 birim işgücü kullanarak 4 kilo reçel üretiyorsak, 4 kilo reçeli 1 birim işgücü , 6 birim sermaye biçimine dönüştüremeyiz.

3. **q_1 ve q_2 üretim yöntemlerini yapılabilir ise, $q_1+q_2=q_3$ yöntemi de yapılabilir. Buna toplanabilirlik özelliği diyoruz. Şekil 3.3 bunu göstermektedir.**

4. **Belirli bir girdi miktarıyla, belirli bir miktar ürün elde edebiliyorsak, girdileri λ oranında kullandığımızda, λ oranında üretim elde edebiliriz. Buna bölünebilirlik adını veriyoruz.**

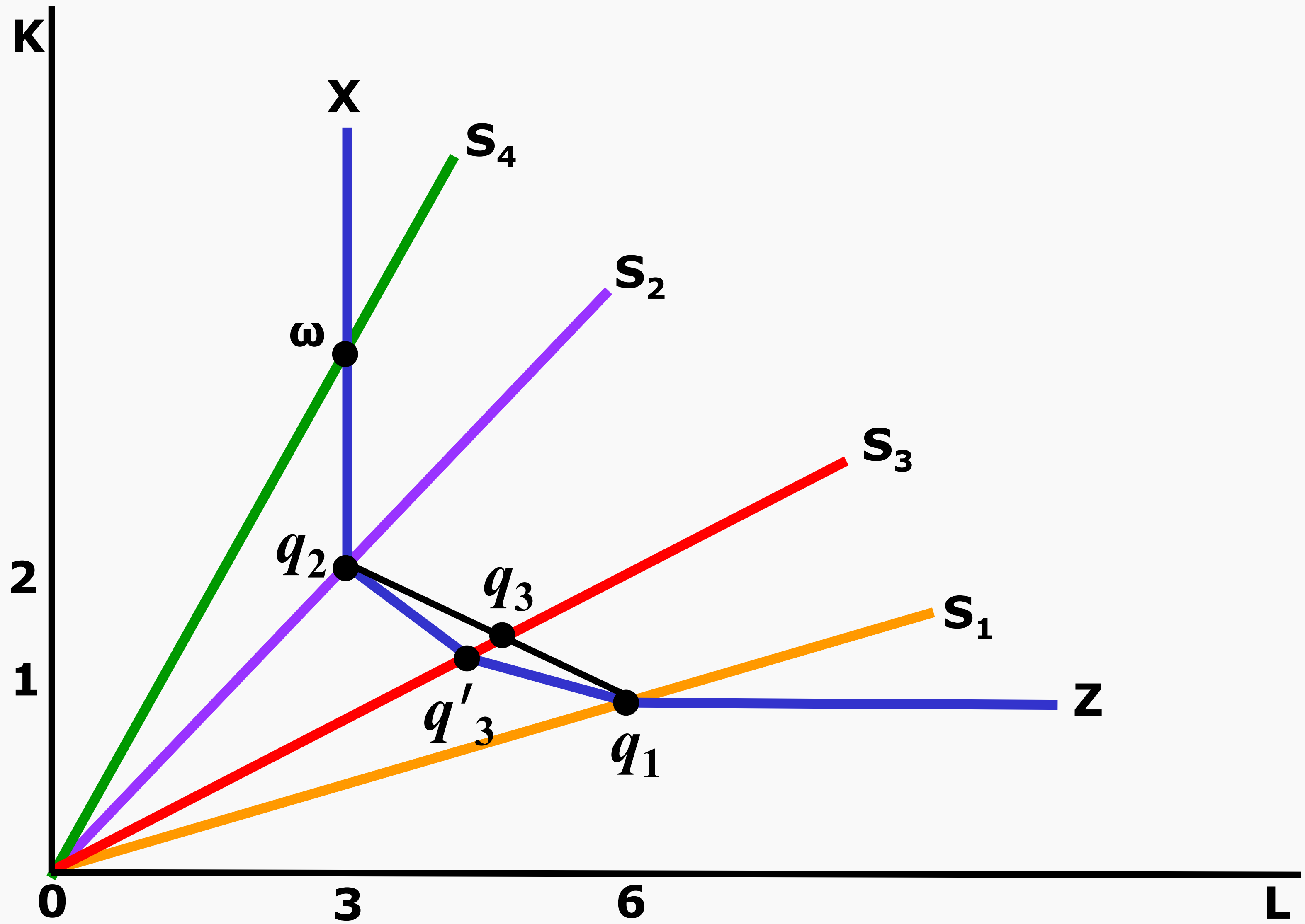
Şekil 3.3. Üretim Tekniklerinde Toplanabilirlik



5. q_1 ve q_2 yöntemleri tam çalışma halinde yapılabilir ise, çalışma sürecinin belirli bölümünde q_1, geri kalan bölümünde q_2 yapılabilir yöntemlerdir. Buna konvekslik (dışbükeylik) özelliği diyoruz. Örneğin yukarıdaki şekilde q_4 yöntemi, tam çalışmanın yarısında q_1, diğer yarısında da q_2 yöntemi ile edilmektedir.

Şekil 3.4'de S_1 ve S_2 üretim yöntemleri, üretim kümemizin sınırlarını çizmektedir. Şimdi orijin noktasından başlayarak S_1 üzerinde 4 birim ürün düzeyine kadar (q_1) ilerleyelim. Aynı işlemi S_2 üzerinde de yapalım (q_2). q_1, S_1 üretim yöntemi kullanıldığında 4 birim ürün elde etmenin teknolojik olarak en etkin yoludur. q_1'in altında 4 birimden az, üstünde de fazla ürün elde ederiz. Dolayısıyla etkin üretim, veri üretim düzeyini en az girdiyle elde etmektir.

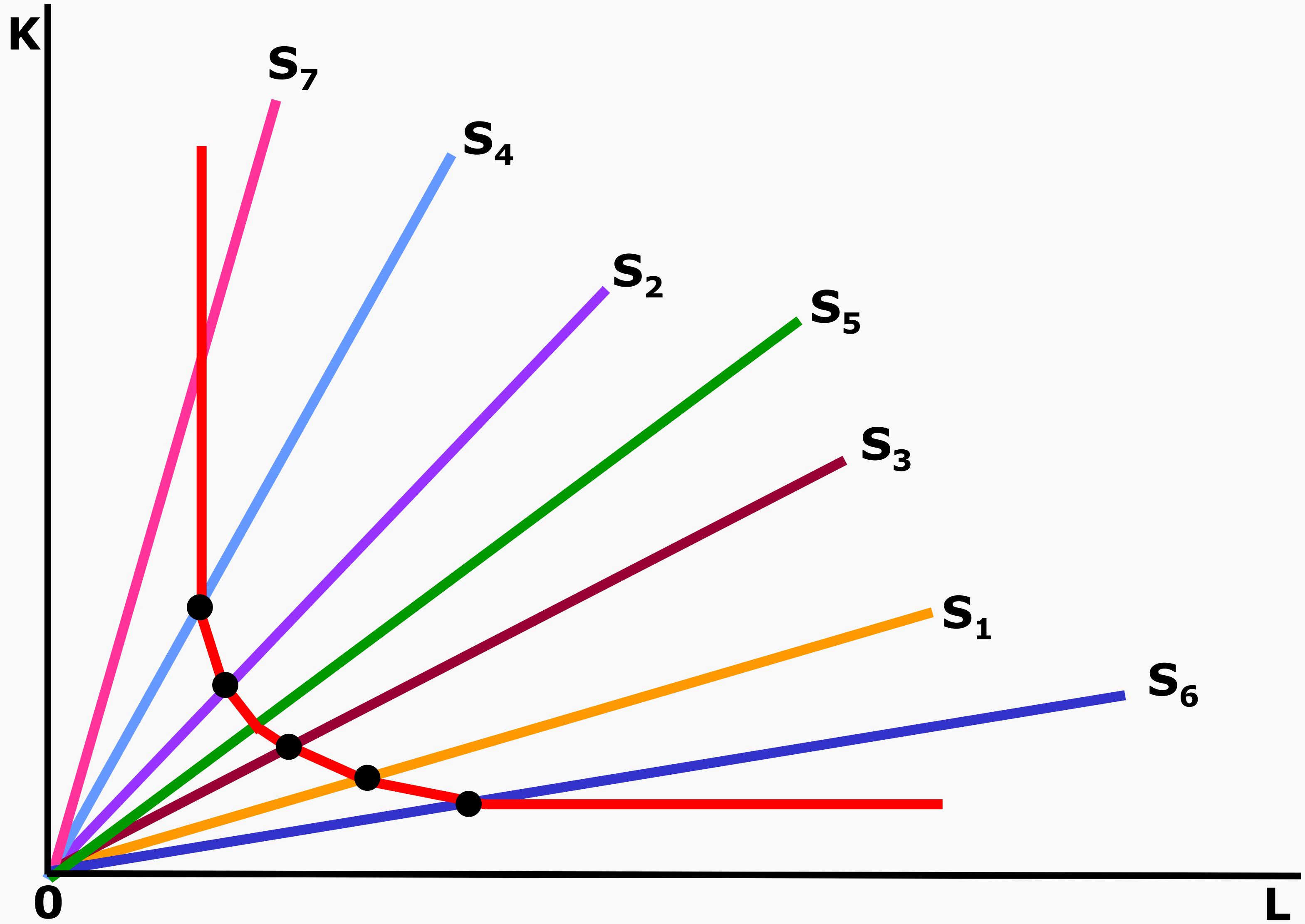
Şekil 3.4. Etkin Üretim Teknikleri



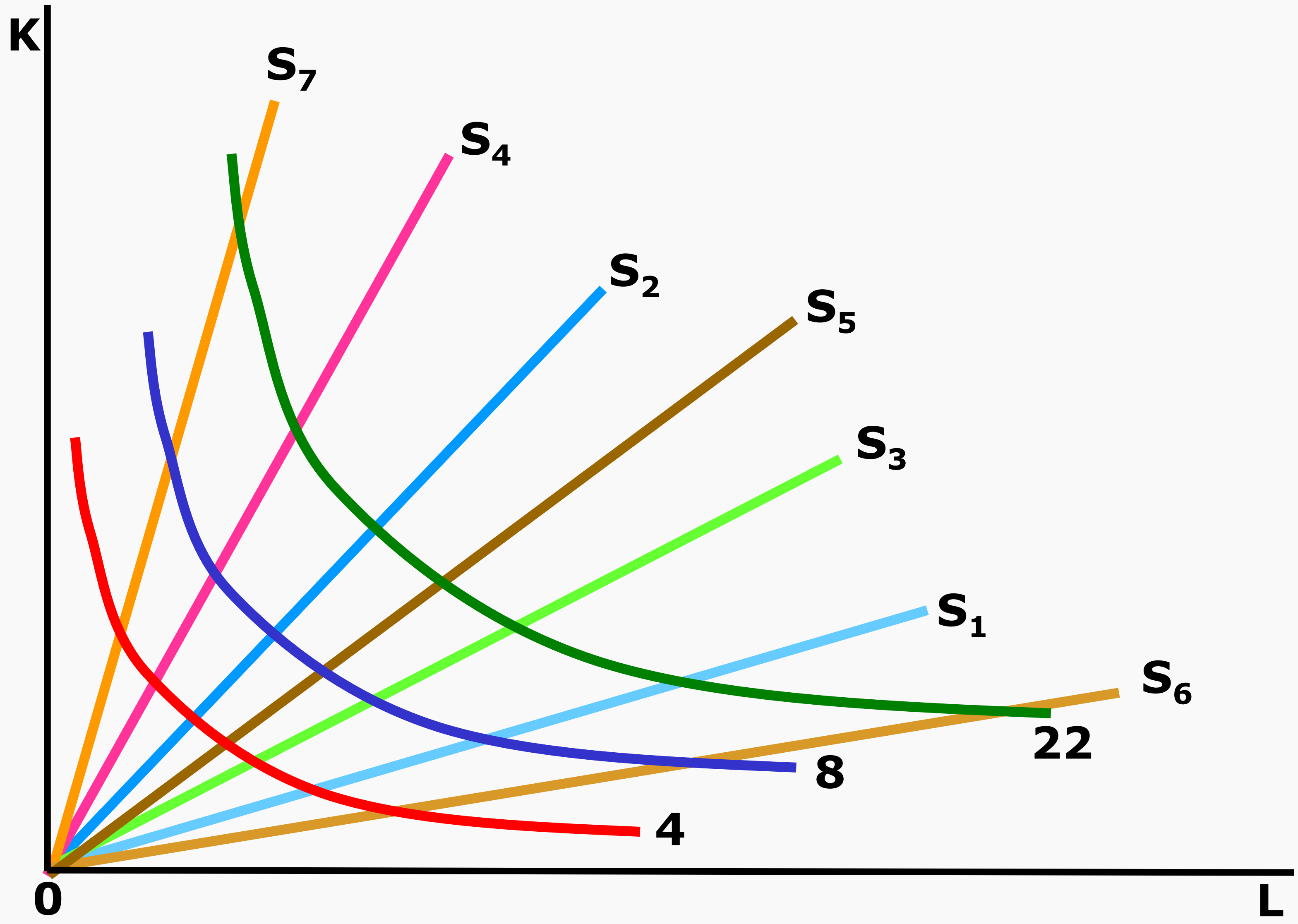
Benzer şekilde her üretim yönteminde 4 birim ürün noktasını işaretleriz. Bu noktaların birleştirilmesiyle oluşan eğriye, eşürün eğrisi adını veriyoruz. Eşürün eğrisinin q_2 noktasından sonra tam dik olduğuna dikkat edelim. Yani işgücü girdisini 3 birimde sabit tutarsak, üretime katılan her ek işgücü 4 birimden daha fazla üretim yapılmasını sağlamaz. Benzer durumu q_1 noktasının sağ tarafı içinde söyleyebiliriz.

Bir önceki şekilde yer alan olanaklı üretim yöntemleri sayısını giderek artıralım. Yeni üretim yöntemleri, sermaye ve işgücü arasında yeni ikame olanaklarının ortaya çıkmasını sağlar. Çok sayıdaki üretim yönteminin her birinde 4 birimlik üretim düzeyini aynı şekilde işaretler ve birleştirirsek, eşürün eğrisindeki dirsek sayısının giderek arttığını ve hatta yöntem sayısını sonsuza götürdüğümüzde, eşürün eğrisinin düzgün bükülen bir konveks eğriye dönüştüğünü görebiliriz.

Şekil 3.5. Olanaklı Üretim Teknikleri ve Eşürün Eğrisi



Şekil 3.6. Olanaklı Üretim Teknikleri ve Eşürün Eğrisi



Düzgün bir hareket çizen eşürün eğrisi, sürekli ve her yerde türevi alınabilir özelliğe sahiptir. Bu şekildeki bir eşürün eğrisinin üzerinde, aynı miktar üretim yapabilmek için sonsuz tane sermaye-işgücü bileşimini kullanmak olanaklıdır. Yukarıda bu özellikleri taşıyan bir grup eşürün eğrisi yer almaktadır. Bu eşürün eğrileri, ilgili malı üretmek için kullanılabilecek mevcut teknolojileri tanımlamakta ve veri bir üretim düzeyini gerçekleştirebilmenin en etkin yolunu göstermektedir.

Aynı zamanda eşürün eğrileri, veri girdilerle, en yüksek ürün miktarının elde edilebileceğini de göstermektedirler.

Bu şekildeki bir grup eşürün eğrisince belirlenen üretim fonksiyonu, veri girdilerle en yüksek ürün miktarının elde edilebileceğini tanımlamaktadır.

$$Çıktı = f(Girdi_1, Girdi_2)$$

Eşürün eğrileri bir çok noktada kayıtsızlık eğrilerine benzemektedir. Kayıtsızlık eğrileri, bireyin tüketim tercihlerini, eşürün eğrileri de bir üreticinin üretim tekniği olanaklarını gösterir. Ancak kayıtsızlık eğrilerinin endeks sayıları tercihteki sıralamayı göstermesine karşın, eşürün eğrilerinin endeks sayıları ise gerçek çıktı miktarını gösterir.

Eşürün eğrilerinin şu özelliklerini sayabiliriz :

1. **Negatif eğimlidir.**

2. **Orijine göre konvekstir.**

3. **Birbirleriyle kesişmezler.**

4. **Orijinden uzaklaştıkça, daha yüksek üretim düzeyini gösterirler.**

Eşürün eğrisinin eğimi, marjinal teknik ikame oranı ($MRTS$) ile ölçülür. $MRTS$, üretim düzeyi aynı kalmak koşuluyla girdilerden birini Δ birim daha fazla kullanmak istediğimizde, diğer girdiden ne ölçüde vazgeçmemiz gerektiğini tanımlar.

$$MRTS_{KL} = -\frac{\Delta K}{\Delta L}$$

Diğer bir ifadeyle, sermaye ile işgücünün birbirlerini ne ölçüde ikame ettiklerini gösterir. Negatif eğimli bir eşürün eğrisinde *MRTS* negatif değere sahiptir. Orijine göre konveks (dışbükey) bir eşürün eğrisi üzerinde *MRTS*'nin mutlak değeri yukarıdan aşağıya inildikçe azalır. Marjinal teknik ikame oranını, sermaye ve işgücünün marjinal verimliliklerinin birbirine oranı olarak da tanımlayabiliriz.

$$MRTS_{KL} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{\Delta q / \Delta L}{\Delta q / \Delta K} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Bir girdinin marjinal verimliliğini şöyle tanımlayabiliriz: Girdilerden biri sabitken, diğerinin Δ birim artışı karşısında, üretimde meydana gelen Δ birimlik değişmedir. Sermayenin ve işgücünün marjinal verimliliklerini şöyle yazabiliriz:

$$MP_K = \frac{\Delta q}{\Delta K} \quad , \quad MP_L = \frac{\Delta q}{\Delta L}$$

Sermayenin marjinal verimliliğini $\Delta q/\Delta K$ olarak yazdık. Sermayenin değişimini sonsuz küçüklükte yaparsak, marjinal verimliliği yeniden şu biçimde tanımlamamız gerekir.

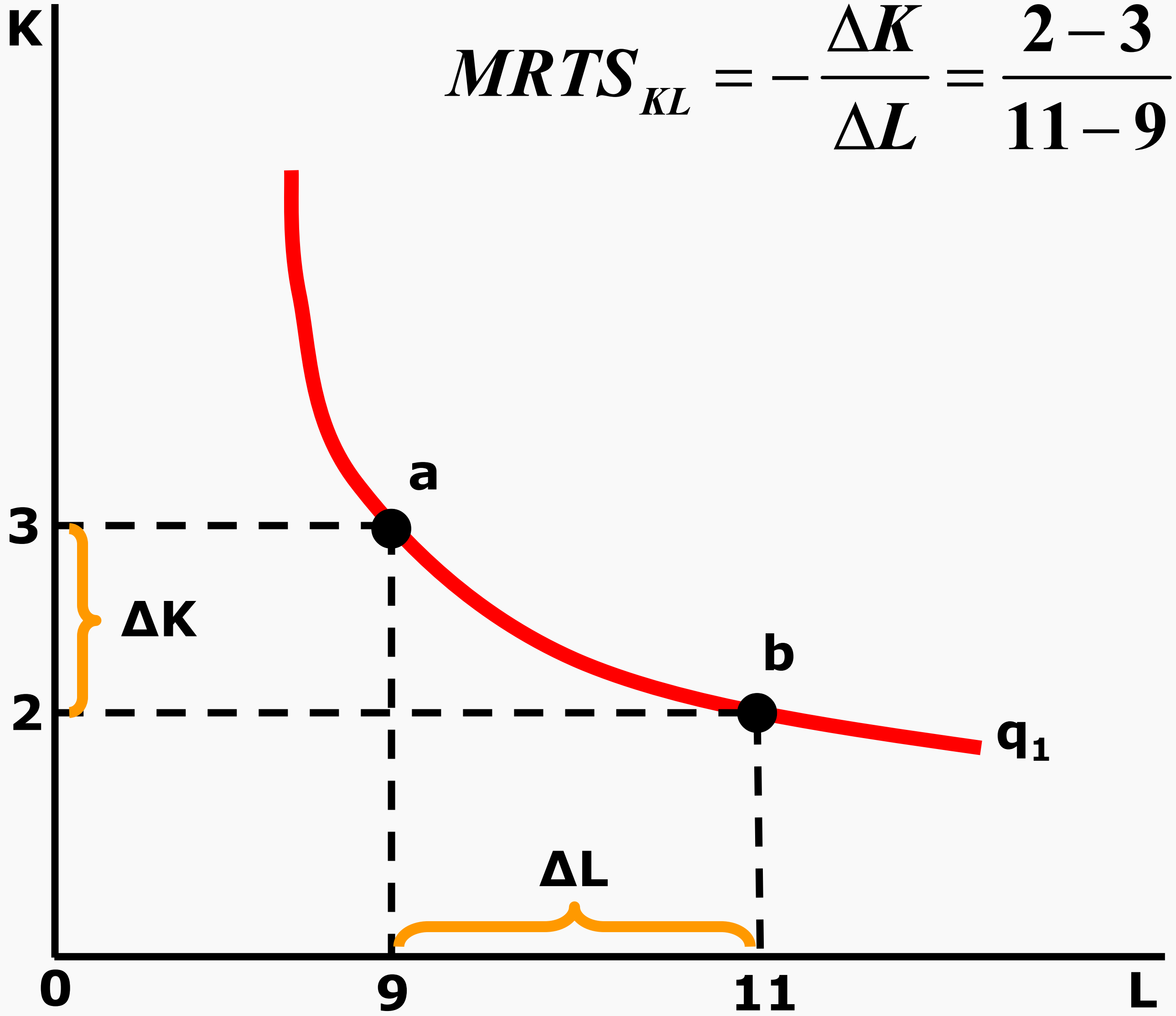
$$MP_K = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta K} = \frac{\partial q}{\partial K} \quad , \quad MP_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{\partial q}{\partial L}$$

Buna göre $MRTS_{KL}$'yi de yeniden tanımlayalım.

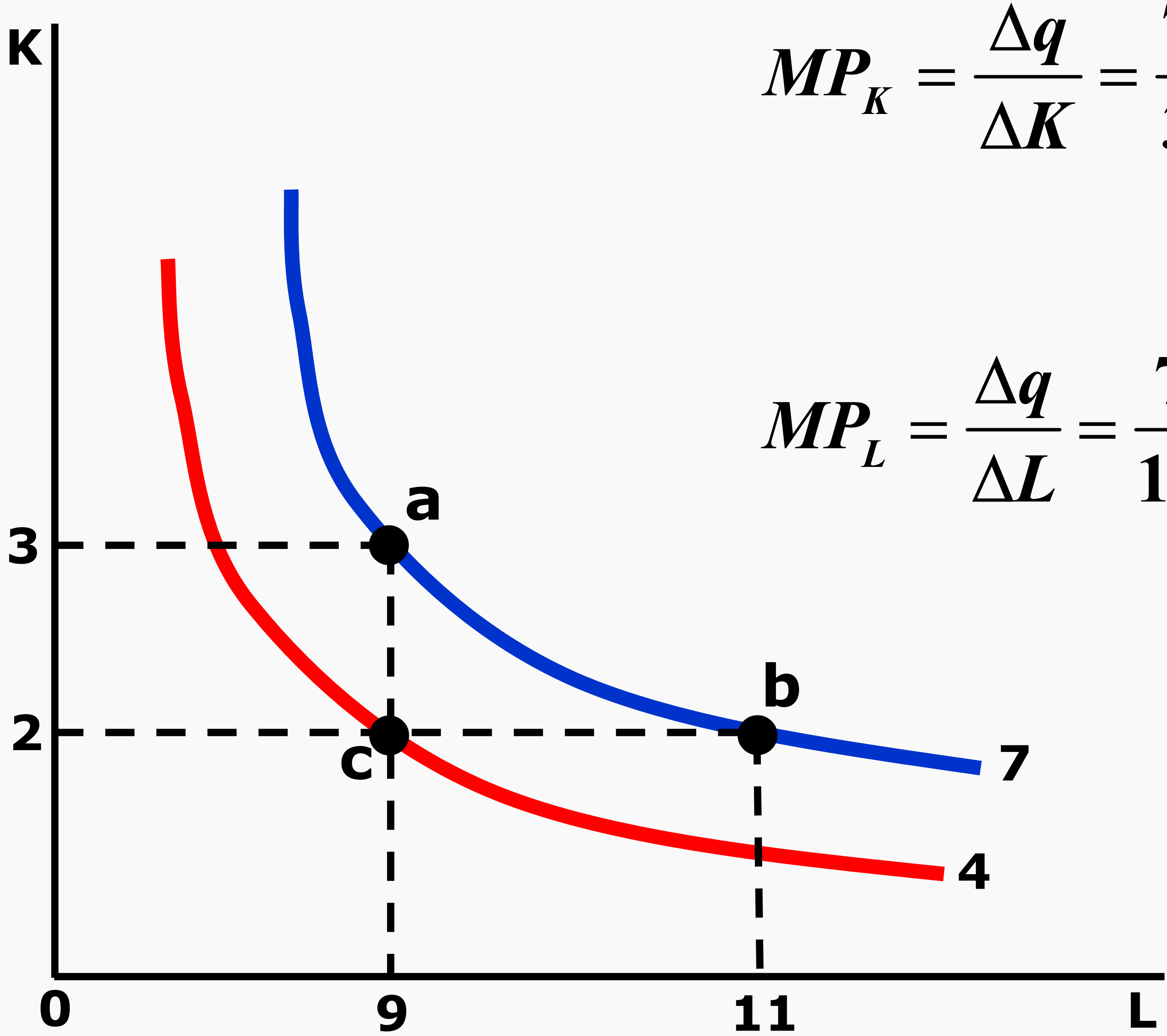
$$MRTS_{KL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\partial q / \partial L}{\partial q / \partial K}$$

Şekil 3.7. Marjinal Teknik İkame Oranı

$$MRTS_{KL} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{2-3}{11-9} = -\frac{1}{2}$$



Şekil 3.8. Marjinal Verimlilik



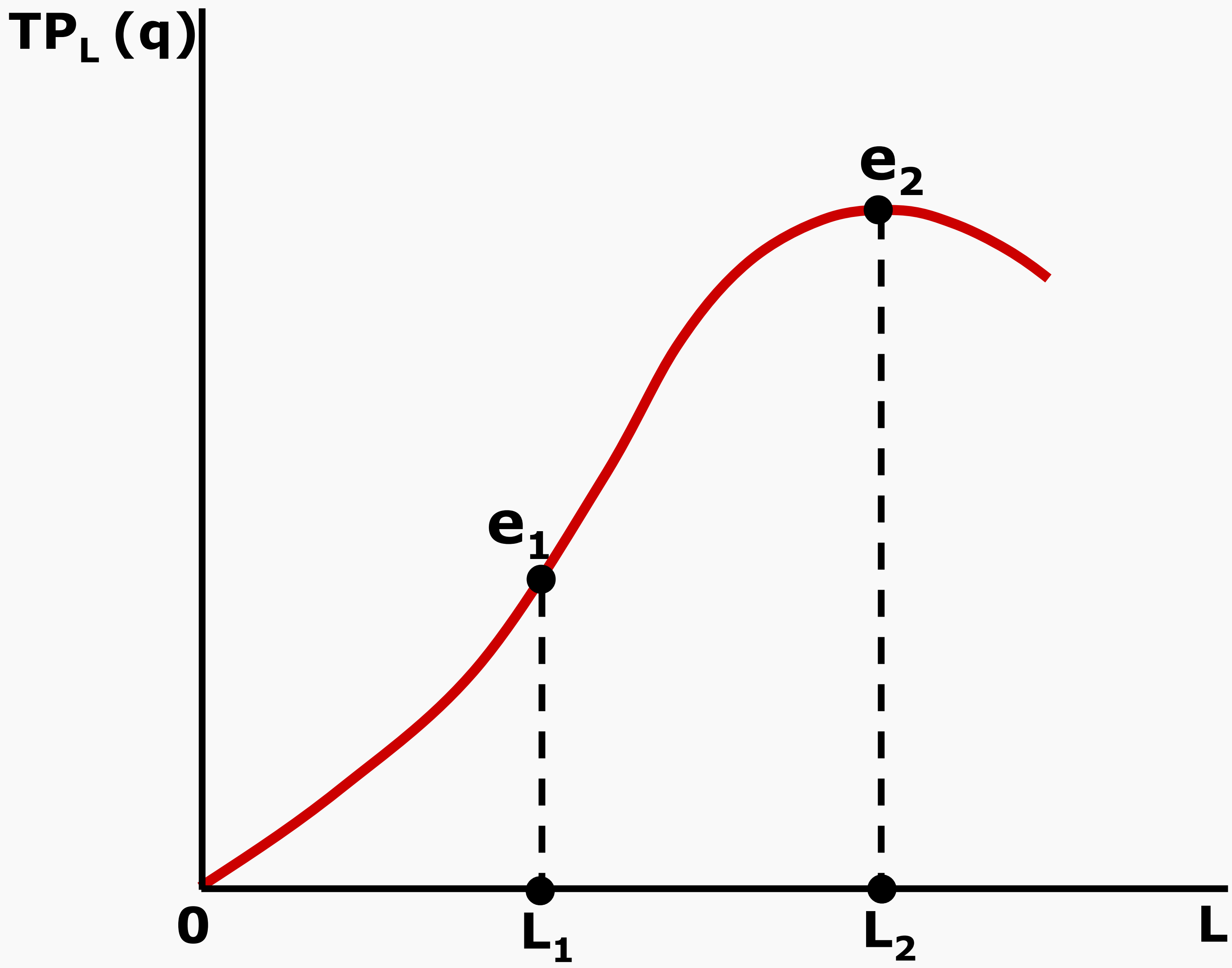
$$MP_K = \frac{\Delta q}{\Delta K} = \frac{7-4}{3-2} = 3$$

L'yi sabit tutuyoruz.

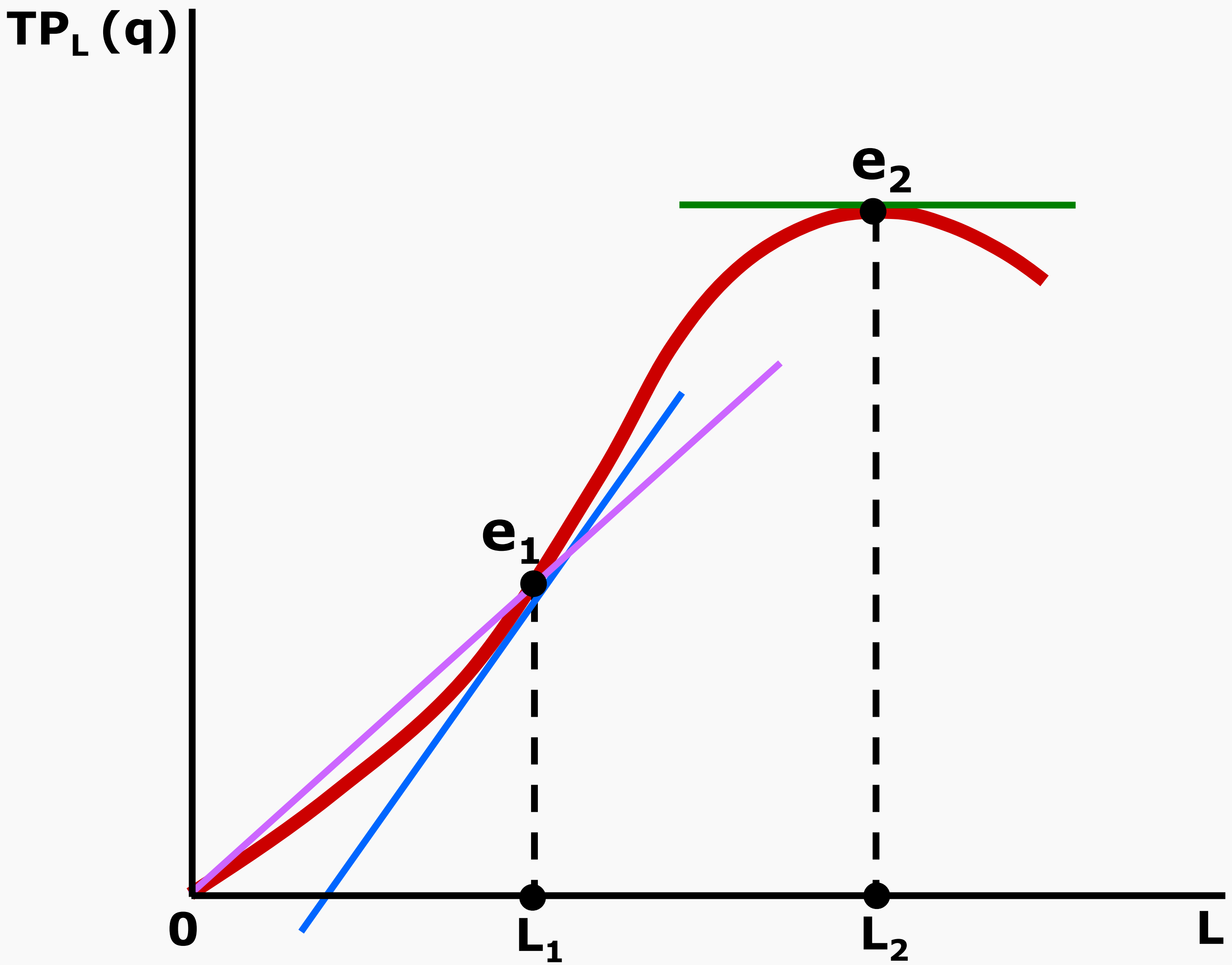
$$MP_L = \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{7-4}{11-9} = \frac{3}{2}$$

K'yi sabit tutuyoruz.

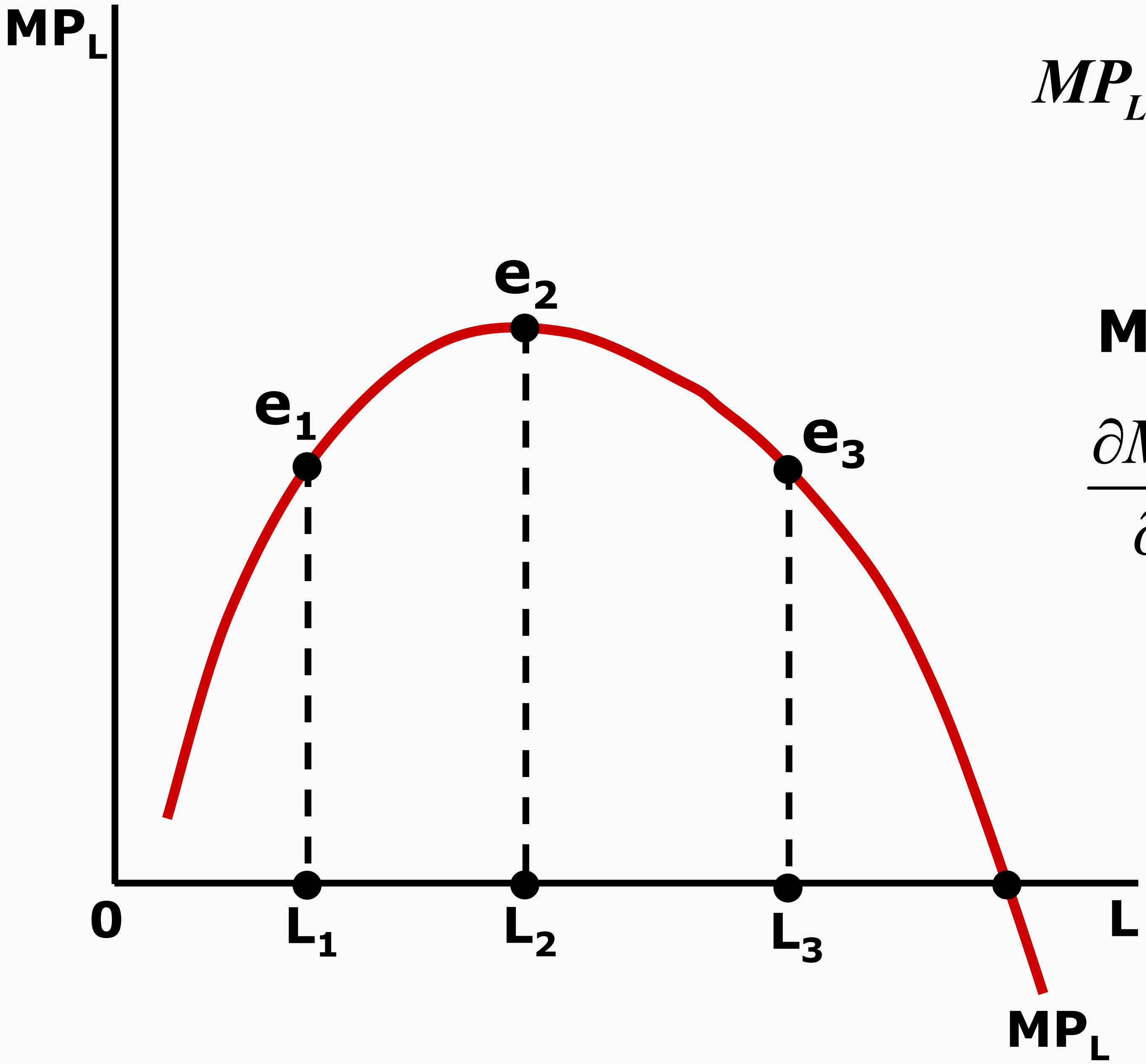
Şekil 3.9. Üretim Fonksiyonu



Şekil 3.10. Üretim Fonksiyonu ve Marjinal ve Ortalama Verimliliklerin Belirlenmesi



Şekil 3.11. Marjinal Verimlilik Eğrisi

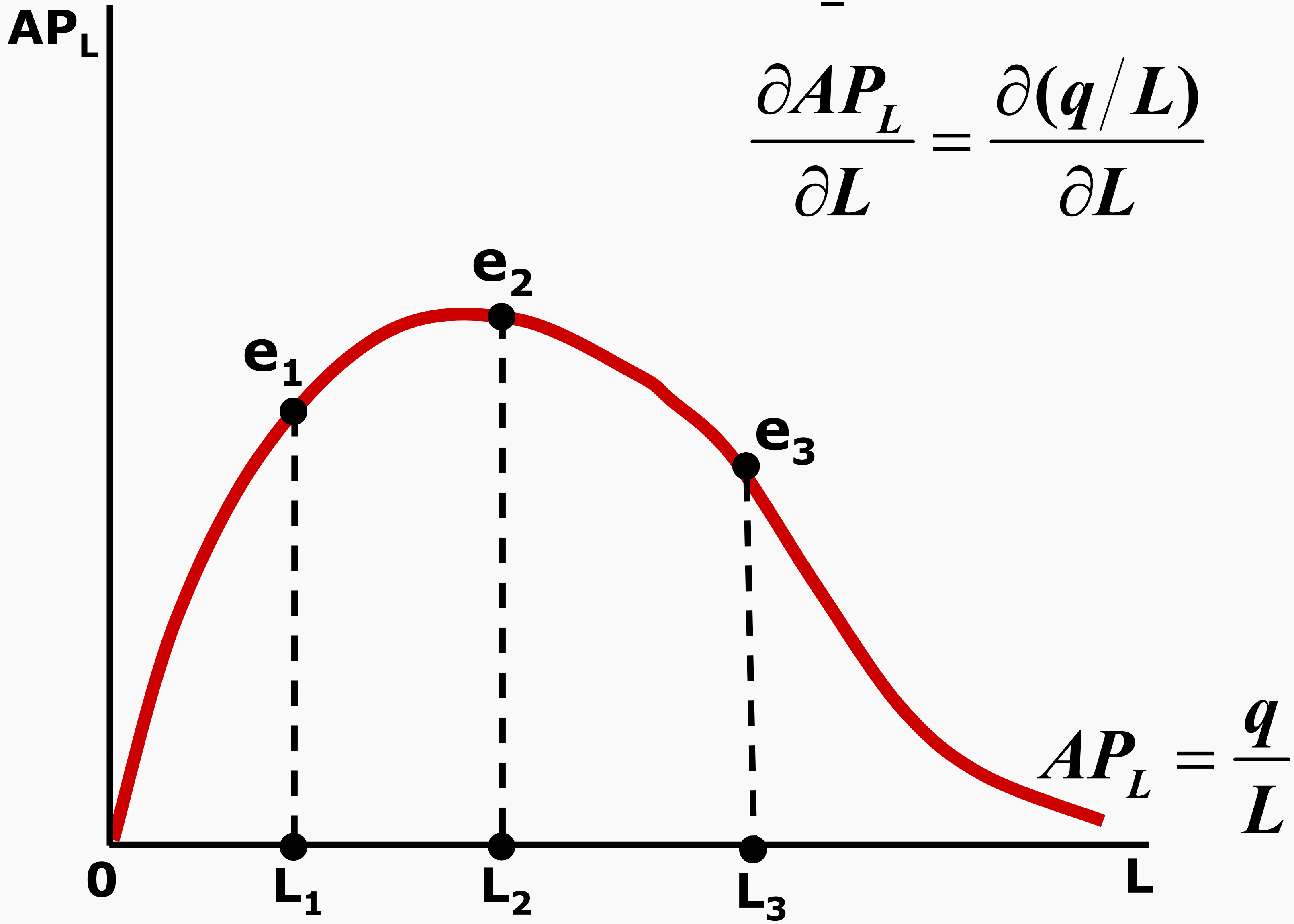


$$MP_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{\partial q}{\partial L}$$

MP$_L$'deki değişim:

$$\frac{\partial MP_L}{\partial L} = \frac{\partial(\partial q / \partial L)}{\partial L} = \frac{\partial^2 q}{\partial L^2}$$

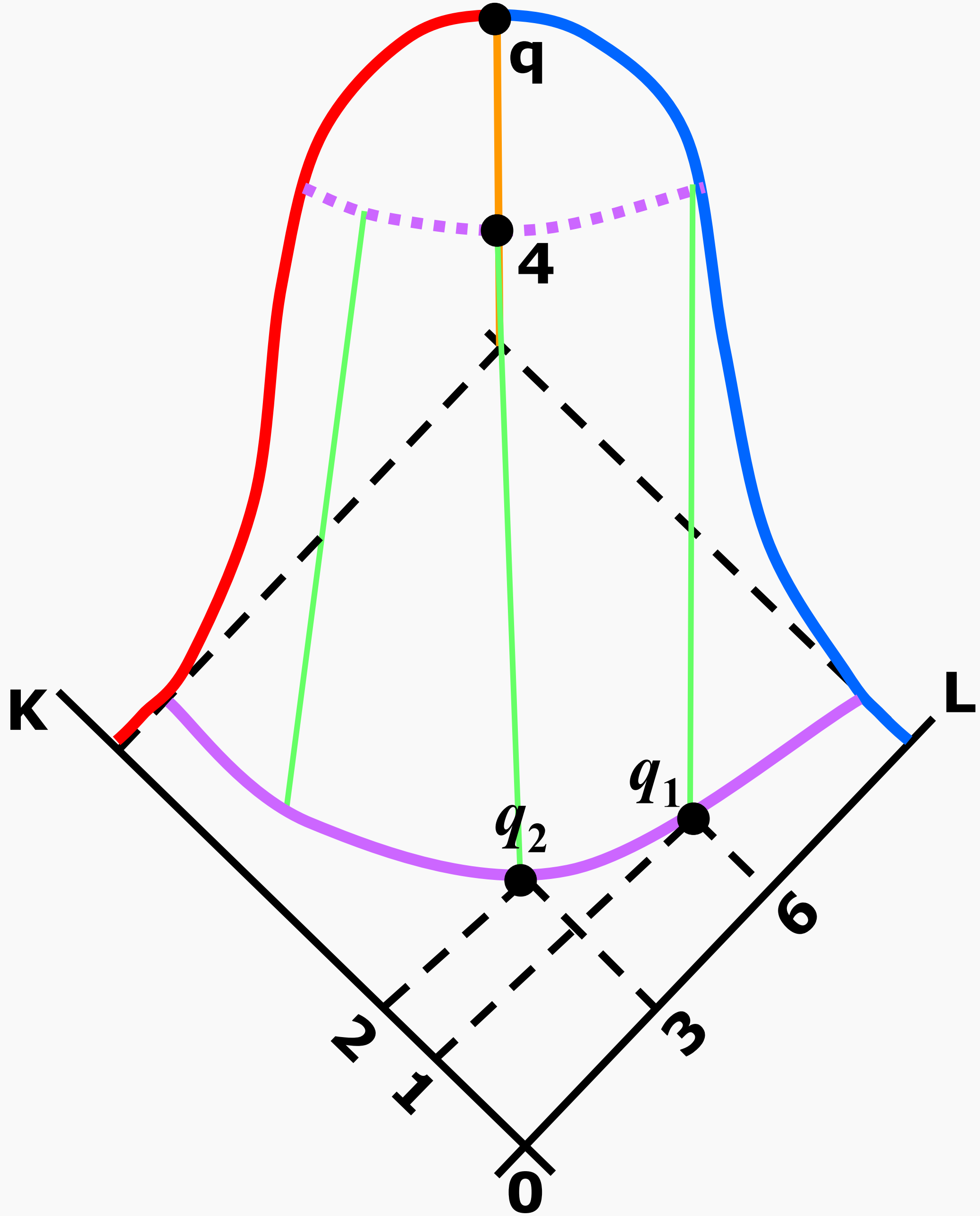
Şekil 3.12. Ortalama Verimlilik Eğrisi



AP_L'deki değişim:

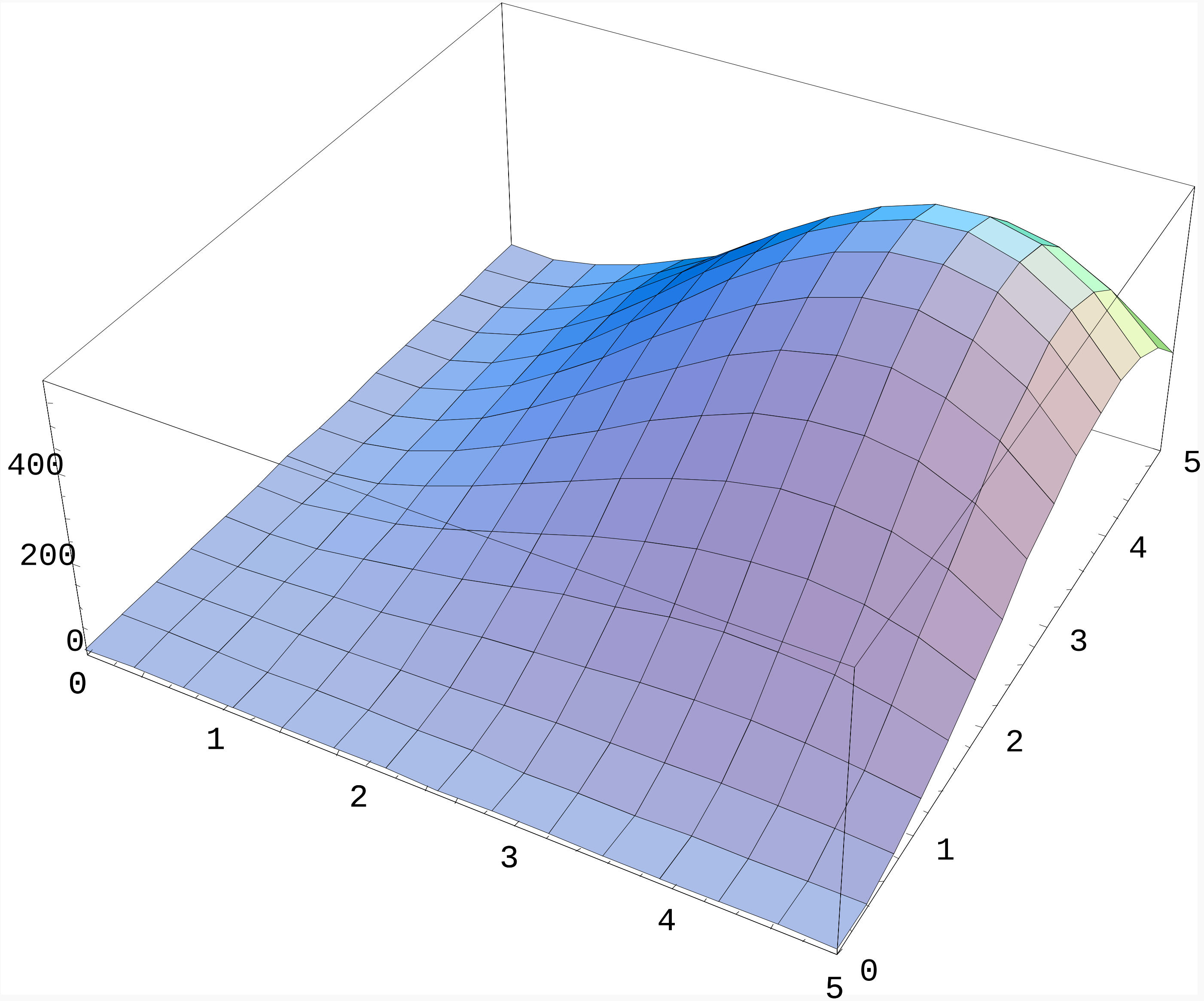
$$\frac{\partial AP_L}{\partial L} = \frac{\partial (q/L)}{\partial L}$$

Şekil 3.13. Üretim Fonksiyonu ve Kayıtsızlık Eğrileri



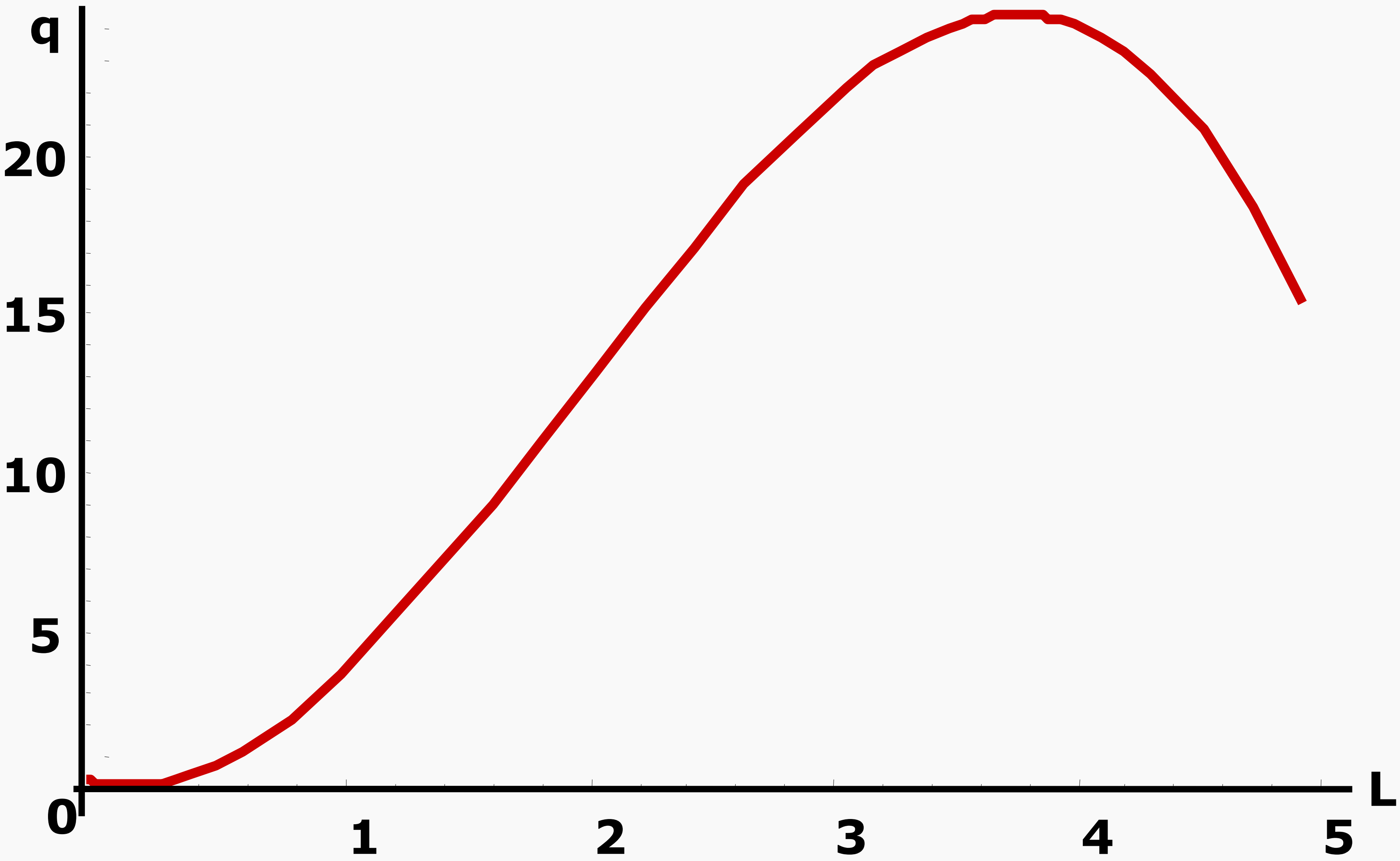
Şekil 3.14a. Üretim Fonksiyonu

$$q = q(K, L) = \left(-K^3 + 6K^2 - 2K\right)\left(-L^3 + 6L^2 - 2L\right)$$



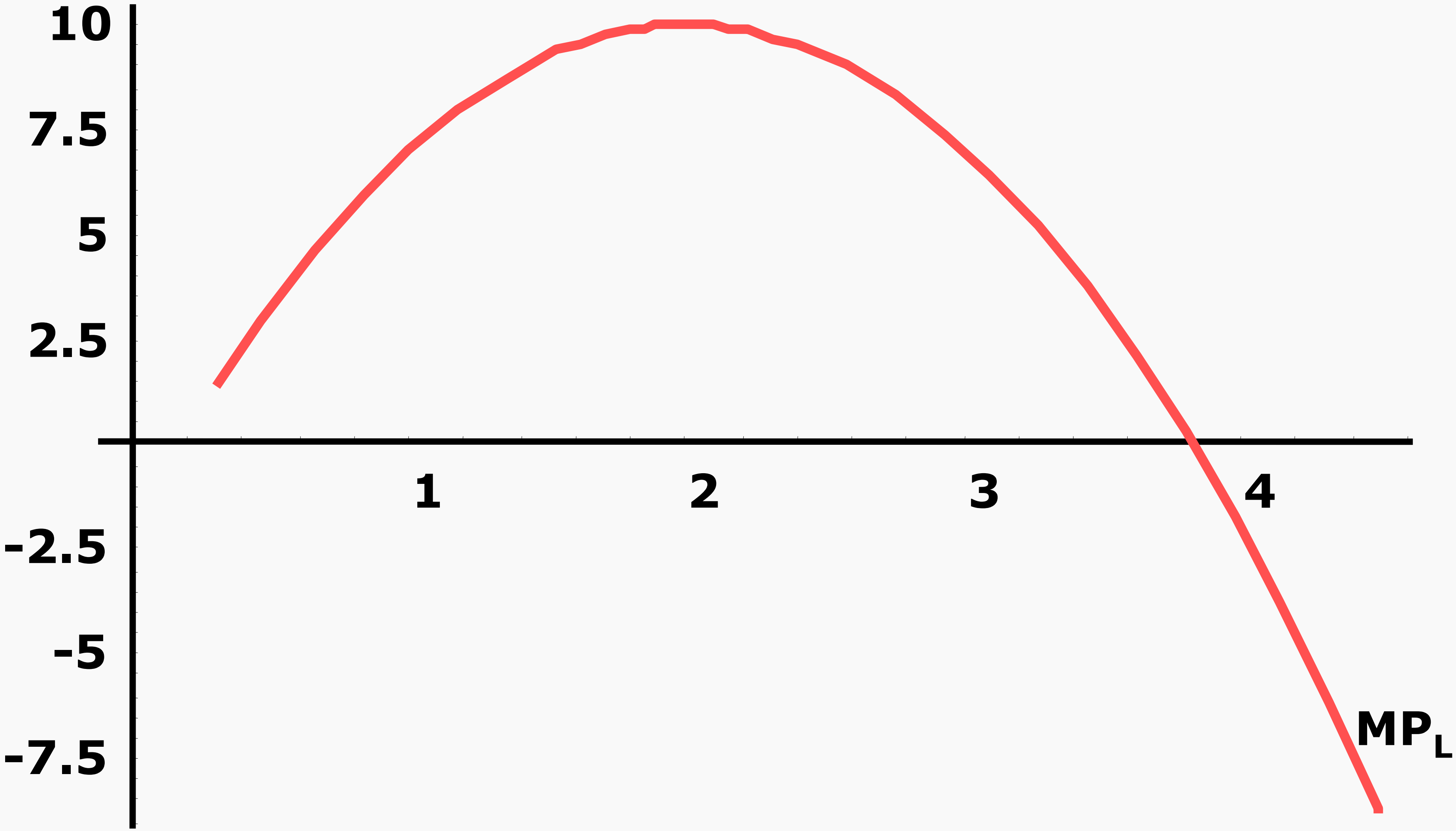
Şekil 3.14b. Üretim Fonksiyonu (Sermaye Sabit)

$$q = q(\bar{K}, L) = -L^3 + 6L^2 - 2L$$



Şekil 3.14c. Marjinal Verimlilik Eğrisi

$$MP_L = MP_L(\bar{K}, L) = -3L^2 + 12L - 2$$



Şekil 3.14d. Ortalama Verimlilik Eğrisi

$$AP_L = AP_L(\bar{K}, L) = -L^2 + 6L - 2$$

Bir girişimci, çok sayıda farklı girdi bileşimi kullanarak, farklı üretim miktarları elde edebilir. Üretim fonksiyonu etkin girdi-çıktı bileşimlerini gösterse de, hangi bileşimin girişimcinin kârını maksimize edeceğini söylemez. Bunu görebilmek için, girişimcinin kullanabileceği teknolojileri incelemek gerekir.

Genel olarak teknolojiyi nitelendiren iki olgu vardır :

1. **Kullanılan teknolojinin ölçeğe göre getirisi.**

2. **İkame esnekliği.**

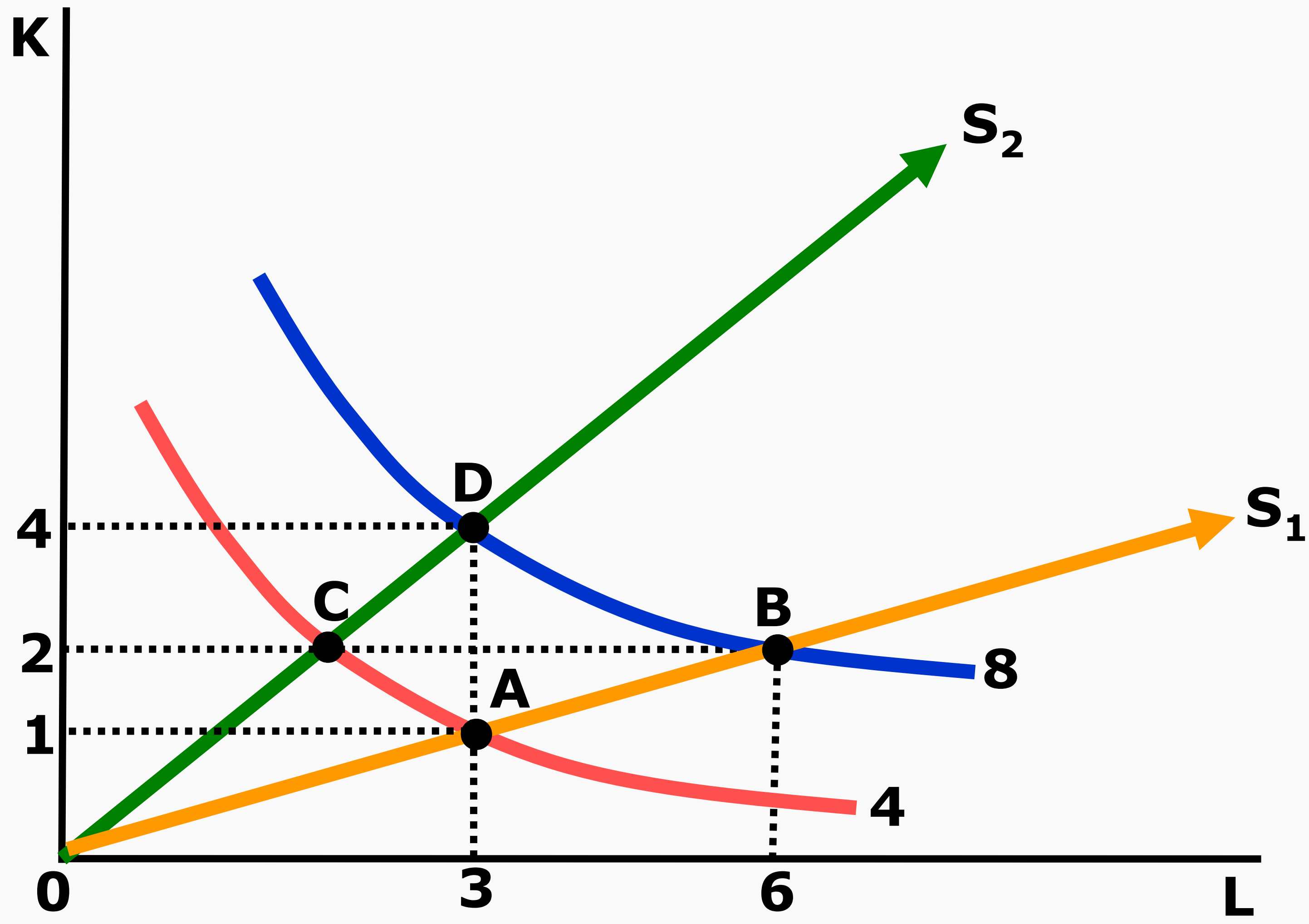
Ölçeğe göre getiri, girdilerin tümü aynı oranda artırıldığında, üretim miktarının ne oranda değiştiği konusunda bilgi verir. Örneğin sermaye ve işgücünü iki katına çıkarırsak, üretim miktarı iki kattan daha fazla mı, daha az mı, yoksa aynı ölçüde mi artar? Bu sorunun yanıtı, kullanılan teknolojinin ölçeğe göre getirisine bağlıdır.

Eğer girdileri iki kat artırdığımızda;

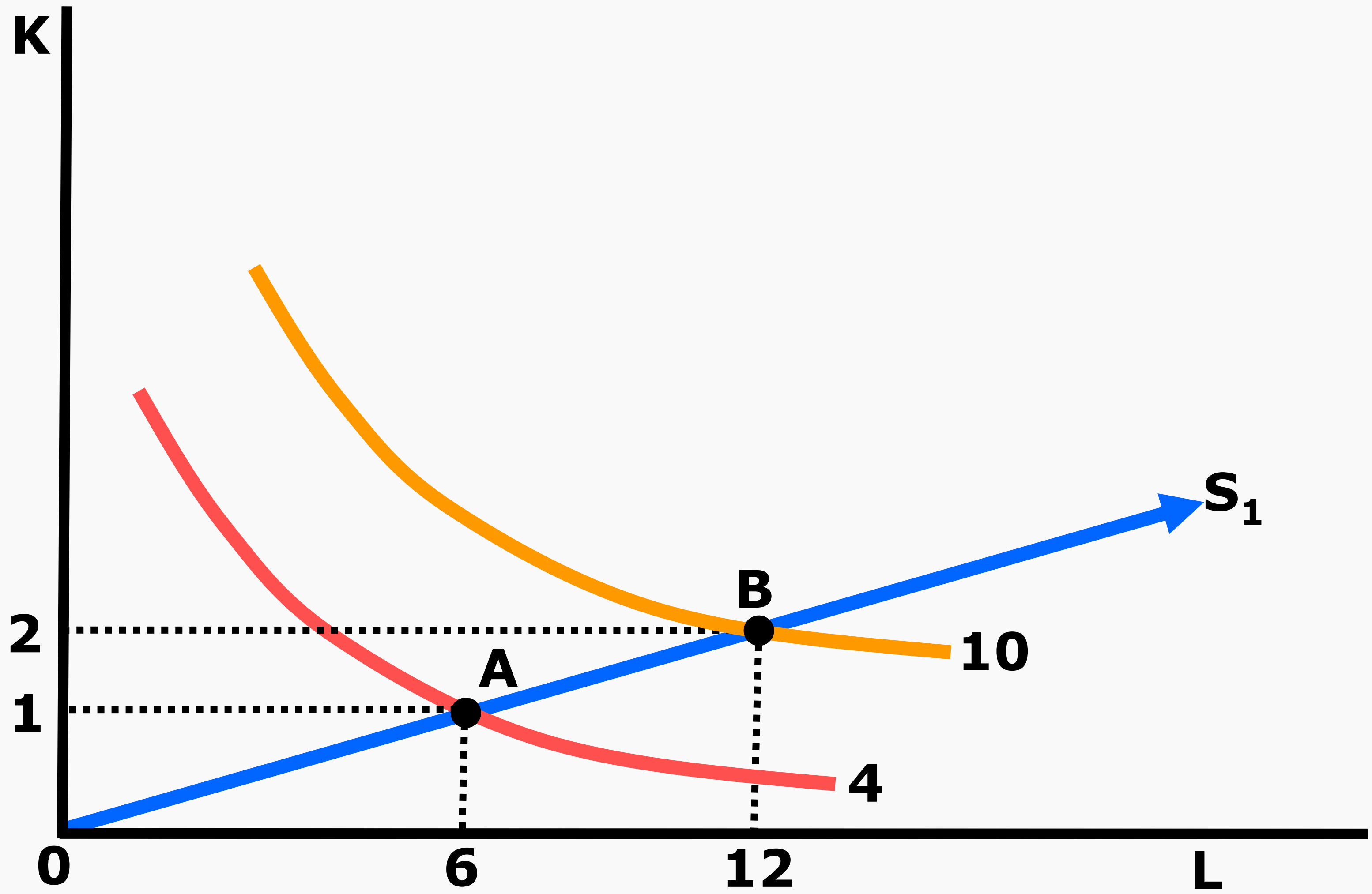
1. **Üretim miktarı iki kattan fazla artıyorsa ölçeğe göre artan getiri**
2. **Üretim miktarı iki kattan az artıyorsa ölçeğe göre azalan getiri**
3. **Üretim miktarı iki kat artıyorsa ölçeğe göre sabit getiri**

vardır.

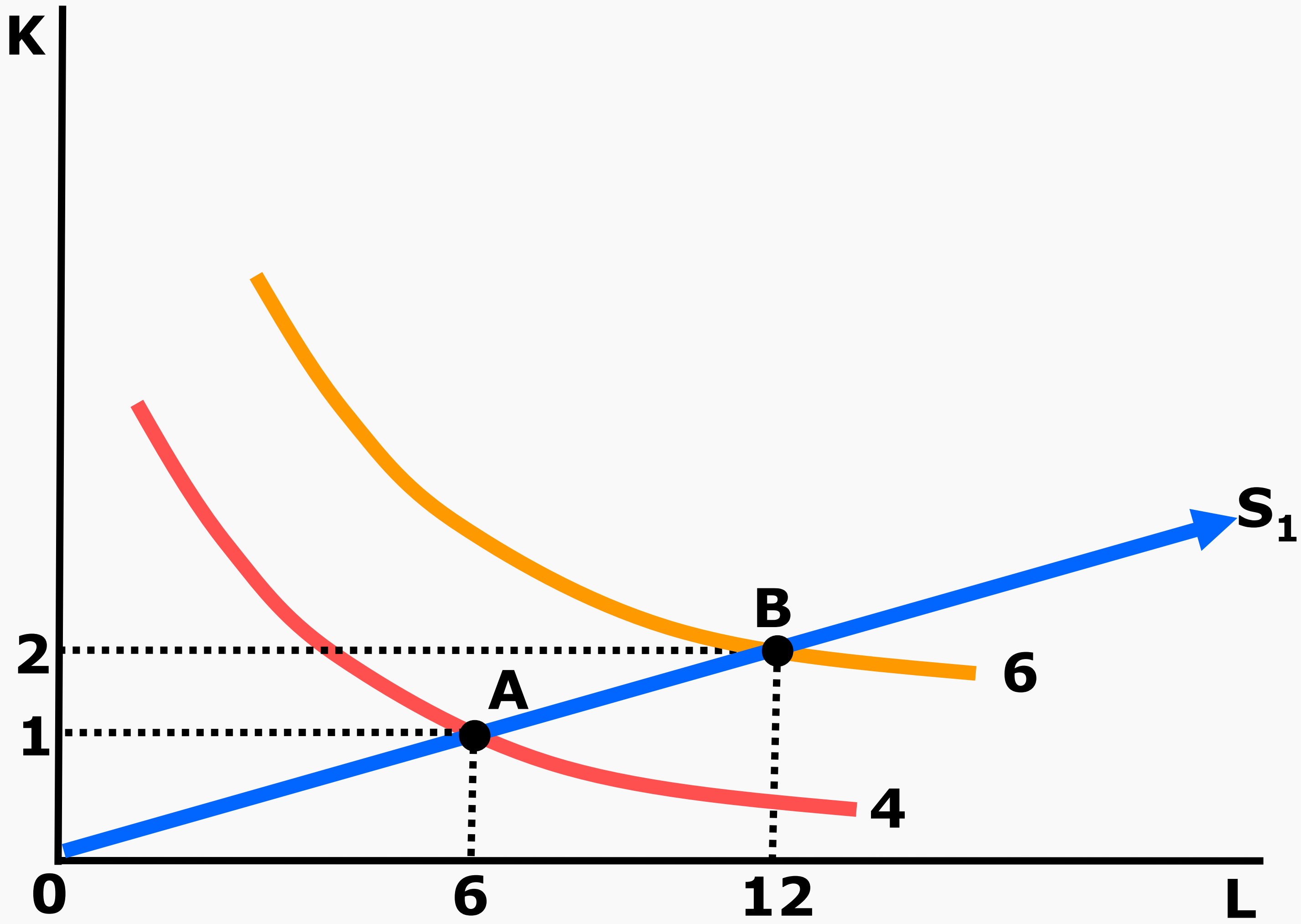
Şekil 3.15a. Ölçeğe Göre Sabit Getiri



Şekil 3.15b. Ölçeğe Göre Artan Getiri



Şekil 3.15c. Ölçeğe Göre Azalan Getiri



Yukarıda verilen ölçeğe göre getiri şekillerinin (Şekil 3.15a,b,c) her birinde sermaye (K) ve işgücünü (L) iki katına çıkarıyoruz.

Ölçeğe göre getirinin sabit olduğu şekilde üretim 4'den 8'e çıkmakta (yani iki kat artmakta); getirinin artan olduğu durumda 4'den 10'a çıkmakta (yani iki buçuk kat artmakta); azalan olduğu durumda da 4'den 6'ya çıkmaktadır (yani bir buçuk kat artmakta).

Ölçeğe göre artan getirinin çeşitli nedenleri vardır.

1. Firma büyüdükçe, işçilerin uzmanlaşması artar, dolayısıyla verimliliği yükselir.

2. Bazı sermaye malları büyük ölçekli firmalarda kullanıldığında önemli tasarruflar sağlayabilir. Örneğin modern bir biçer-döver aracının 100 dönümlük bir işletmede kullanılması ile, 100000 dönümlük işletmede kullanılması gibi.

3. Fiziksel koşullarda bazı değişikliklerin yapılması. Örneğin boru hattıyla petrol taşımacığı yapan bir firma, boru çapını iki katına çıkardığında, taşınan petrol miktarı iki katından fazla artar.

Teknolojiyi niteleyen diğer önemli konu ikame esnekliğidir. İkame esnekliği, veri bir üretim düzeyinde girdilerin birbirini ne kolaylıkta ikame ettiğini gösterir.

İkame esnekliği, göreli faktör fiyatlarındaki yüzde değişmenin, faktör yoğunluğunda yol açtığı yüzde değişme ile ölçülür.

$$\sigma = \frac{\dfrac{\Delta(K/L)}{(K/L)}}{\dfrac{\Delta(w/r)}{(w/r)}}$$

Faktör yoğunluğundaki (K/L) yüzde değişme

Göreli Faktör fiyatlarındaki (w/r) yüzde değişme

Üretim teorisi içinde şu ana kadar, girişimcinin optimal bir girdi bileşimini nasıl ayarlayabileceği ile ilgili konuları ele aldık. Ancak analizi zamandan soyutlayarak yaptık. Girişimcinin, üretmeyi planladığı çıktı miktarını en az harcamayla üretebilmesi için gereken optimal girdi karmasını ne kadar bir zamanda oluşturabileceğini de bilmesi gereklidir.

Örneğin reçel üreticisinin elinde 1 adet kavanoz olduğunu ve 6 meyve toplayıcısıyla da anlaşma yapmış olduğunu varsayalım. Eğer üretim zamanında reçel talebi düşecek olursa, girişimcinin girdi sözleşmelerini önceden yaparak bağlanmış olması nedeniyle, bu durum karşısında yapabileceği hiçbir şey yoktur. Bu zaman dilimine, piyasa dönemi ya da çok kısa dönem diyoruz.

Zaman boyutunu biraz daha artırdığımızda, girişimci sermaye girdisinde bir değişiklik yapamasa da, işgücü girdisini, sözleşmeleri iptal ederek azaltabilir, dolayısıyla üretimi kısabilir. Bu zaman dilimine kısa dönem diyoruz. Dikkat edilmesi gereken nokta, girdilerden biri sabitken, diğeri değişkendir.

Girişimcinin tüm girdileri değiştirebileceği zaman dilimi de **uzun dönem** olarak ifade edilmektedir. Böyle bir dönemdeki üretim fonksiyonunu da **uzun dönem üretim fonksiyonu** olarak adlandırıyoruz. Dolayısıyla kısa dönem üretim fonksiyonunda girişimci yalnızca işgücü kullanımını değiştirebiliyor. Sermaye sabit girdidir.

Şekil 3.16'daki üretim eğrisi üzerindeki işgücü marjinal verimliliklerini ve değişimlerini kısa dönem için şöyle yazabiliriz:

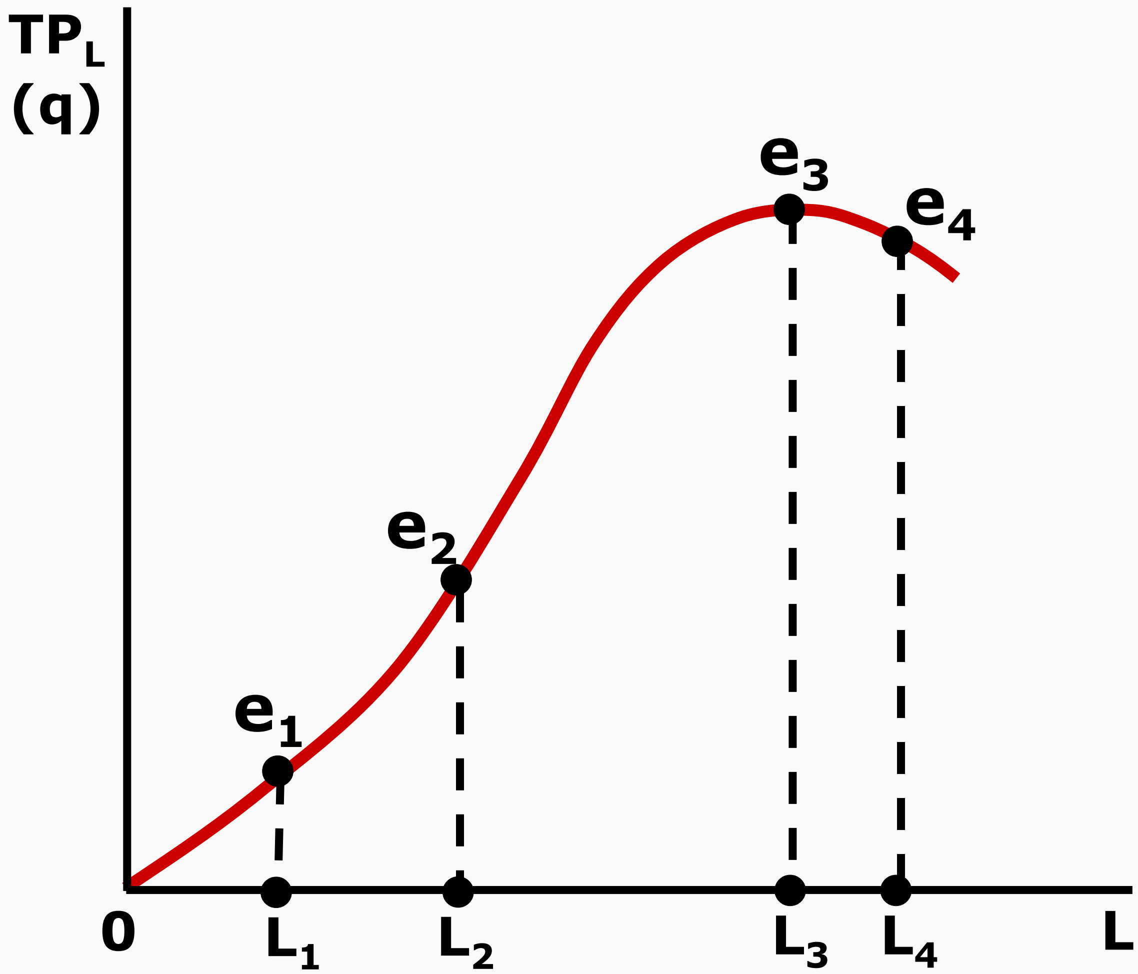
L_1'de : $$\frac{\partial q}{\partial L} > 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 q}{\partial L^2} > 0$$

L_2'de : $$\frac{\partial q}{\partial L} > 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 q}{\partial L^2} = 0$$

L_3'de : $$\frac{\partial q}{\partial L} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 q}{\partial L^2} < 0$$

L_4'de : $$\frac{\partial q}{\partial L} < 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 q}{\partial L^2} < 0$$

Şekil 3.16. Kısa Dönemde İşgücünün Marjinal Verimliliği



Cobb-Douglas Üretim Fonksiyonu

İktisat biliminde hem teorik hem de uygulamalı çalışmalarda çok sık kullanılan bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun genel biçimi şöyledir :

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad A > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

Cobb-Douglas üretim fonksiyonunu kullanarak, üretime ilişkin olguları inceleyelim. Aşağıda sırasıyla ölçeğe göre getiri, marjinal teknik ikame oranı, ikame esnekliği, sermayenin ve işgücünün marjinal ve ortalama verimlilikleri konuları ele alınmıştır.

1. Ölçeğe Göre Getiri

Bir üretim fonksiyonunun ölçeğe göre getirisi, fonksiyondaki tüm girdiler aynı oranda artırıldığında, üretime ne olacağını gösterir. Cobb-Douglas üretim fonksiyonunda ölçeğe göre getiri derecesi, $\alpha+\beta$ 'ya eşittir. Bunu görebilmek için şu işlemleri yapalım :

$$Q^{*} = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} =$$

$$Q^{*} = \lambda^{\alpha+\beta} A K^{\alpha} L^{\beta} \quad \rightarrow \quad Q^{*} = \lambda^{\alpha+\beta} Q$$

$$Q^* = \lambda^{\alpha+\beta} Q$$

$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow Q^* = Q \Rightarrow$ **Ölçeğe göre sabit getiri**

$\alpha + \beta > 1 \Rightarrow Q^* > Q \Rightarrow$ **Ölçeğe göre artan getiri**

$\alpha + \beta < 1 \Rightarrow Q^* < Q \Rightarrow$ **Ölçeğe göre azalan getiri**

2. Marjinal Teknik İkame Oranı

Marjinal teknik ikame oranı ($MRTS_{KL}$), aynı üretim düzeyini sürdürebilecek şekilde, girdilerden birinden vazgeçilen miktarın, diğer girdideki artışa oranıdır. Aynı zamanda eşürün eğrisinin eğimiyle belirlenir. $MRTS_{KL}$ 'yi bulabilmek için, üretim fonksiyonunun toplam diferansiyelini buluruz, sıfıra eşitleriz.

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL = 0 \quad \rightarrow \quad MRTS_{KL} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial Q / \partial L}{\partial Q / \partial K}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}$$

$$MRTS_{KL} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}}{\alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}} = \frac{\beta L^{-1} A K^{\alpha} L^{\beta}}{\alpha K^{-1} A K^{\alpha} L^{\beta}} = \frac{\beta L^{-1} Q}{\alpha K^{-1} Q}$$

$$\boxed{MRTS_{KL} = \frac{\beta K}{\alpha L}}$$

3. İkame Esnekliği

İkame esnekliği, aynı zamanda bir eşürün eğrisinin eğrilik derecesi konusunda da bilgi verir. Dolayısıyla, $MRTS_{KL}$ 'de meydana gelen yüzde değişmenin, faktör yoğunluğunda yol açtığı yüzde değişme olarak da tanımlanabilir.

$$\sigma = \frac{d\ln(K/L)}{d\ln(MRTS_{KL})} = \frac{d(K/L)\big/(K/L)}{d(MRTS_{KL})\big/(MRTS_{KL})}$$

$$\sigma = \frac{d(K/L)\big/(K/L)}{d(dK/dL)\big/(dK/dL)}$$

$$MRTS_{KL} = \frac{\beta K}{\alpha L} \quad \rightarrow \quad \ln(MRTS_{KL}) = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\frac{d\ln(MRTS_{KL})}{d\ln\left(K/L\right)} = 1 = \frac{1}{\sigma} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{d\ln\left(K/L\right)}{d\ln(MRTS_{KL})} = 1$$

4. Üretim Fonksiyonu Ölçeğe Göre Sabit Getiriliyse

$$Q = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

Ayrıca şu tanımlamaları da yapalım :

$$q = \frac{Q}{L} \quad , \quad k = \frac{K}{L}$$

Bu yeni tanımlara göre q , kişi başına çıktı; k, kişi başına sermayedir. Üretim fonksiyonunu yeniden yazalım.

$$Q = AK^{\alpha} L^{1} L^{-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} L \;\rightarrow\; \frac{Q}{L} = q = Ak^{\alpha}$$

Şimdi de sırasıyla sermayenin ve işgücünün marjinal ve ortalama verimliliklerine bakalım.

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha A \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha-1} = \alpha A k^{\alpha-1}$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = AK^{\alpha}(1-\alpha)L^{1-\alpha-1} = (1-\alpha)A\left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha} = (1-\alpha)Ak^{\alpha}$$

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} = A\left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha-1} = Ak^{\alpha-1}$$

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = A\left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}$$

Sermaye ve işgücüne, marjinal verimlilikleri ölçüsünde ödeme yapıldığını varsayalım. Bu durumda sermaye ve işgücünün toplam üründen aldıkları payları sırasıyla yazalım.

$$\frac{K.MP_K}{Q} = \frac{K\alpha Ak^{\alpha-1}}{LAk^{\alpha}} = \alpha \quad , \quad \frac{L.MP_L}{Q} = \frac{L(1-\alpha)Ak^{\alpha}}{LAk^{\alpha}} = 1-\alpha$$

Görüldüğü gibi, sermaye ve işgücünün üstel katsayıları, girdilerin çıktıdan aldıkları göreli payları göstermektedir. Ölçeğe göre sabit getirili üretim fonksiyonunda, toplam ürün sermaye ve işgücünün marjinal verimliliği ölçüsünde dağıtıldığında, geride dağıtılmamış ürün kalmamaktadır.

Bu şekildeki çıktı dağılımına Euler Teoremi adını veriyoruz. Bunu görelim.

$$Q = K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L}$$

$$Q = K\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} + L(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}$$

$$Q = \alpha Q + (1-\alpha)Q$$

$$\underbrace{Q}_{\text{Toplam Ürün}} = \underbrace{Q}_{\text{Dağıtılan Ürün}}$$

Toplam Ürün = **Dağıtılan Ürün**

Yukarıda α ve β terimlerinin, sırasıyla sermaye ve işgücünün çıktıdaki göreli payı olduğunu gördük. Bu terimler aynı zamanda çıktı-sermaye ve çıktı-işgücü esnekliklerini de göstermektedir.

$$\varepsilon_{QK} = \frac{\partial Q / Q}{\partial K / K} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \frac{\partial Q / \partial K}{Q / K}$$

$$\varepsilon_{QL} = \frac{\partial Q / Q}{\partial L / L} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \frac{\partial Q / \partial L}{Q / L}$$

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad \rightarrow \quad \ln Q = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

$$\frac{d \ln Q}{d \ln K} = \frac{\partial Q / Q}{\partial K / K} = \alpha = \varepsilon_{QK}$$

CES Üretim Fonksiyonu

CES (Constant Elasticity of Substitution, Sabit İkame Esnekliği) üretim fonksiyonu şöyledir:

$$Q = A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \;,\; A > 0 \;,\; 0 < \delta < 1 \;, -1 < \rho \neq 0$$

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, CES üretim fonksiyonunun ($\rho \to 0$ iken) özel bir biçimidir. Bunu daha sonra göreceğiz. CES'deki bir çok parametre ve değişken, Cobb-Douglas'daki gibidir. A, etkenlik parametresidir (teknoloji endeksi); δ, üretimin girdiler arasındaki dağılımını; ρ parametresi, ikame esnekliğinin derecesini belirler.

İlk olarak CES'in türdeşliğini inceleyelim:

$$= A\left[\delta(jK)^{-\rho} + (1-\delta)(jL)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$= jA\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} = jQ$$

Bu sonuca göre CES, birinci dereceden (doğrusal) türdeştir. Yani ölçeğe göre sabit getiriye sahiptir. Ortalama ve marjinal fizik ürünler sıfırıncı dereceden türdeştir, Euler teoremini sağlar ve kesin içbükeyimsidir (kayıtsızlık eğrileri kesin dışbükeydir). Bu son özelliği görelim. Bunun için aşağıda sırasıyla işgücü ve sermaye için marjinal fizik ürünleri belirleyelim.

$$Q_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = A\left(-\frac{1}{\rho}\right)\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}(1-\delta)(-\rho)L^{-\rho-1}$$

$$= (1-\delta)A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1+\rho}{\rho}} L^{-(1+\rho)}$$

$$= (1-\delta)\frac{A^{1+\rho}}{A^{\rho}}\left(\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{1+\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} L^{-(1+\rho)}$$

$$= \frac{(1-\delta)}{A^{\rho}}\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+\rho} > 0$$

$$Q_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\delta}{A^{\rho}}\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+\rho} > 0$$

Eşürün eğrisinin eğimi:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{Q_L}{Q_K} = \frac{\dfrac{(1-\delta)}{A^{\rho}}\left(\dfrac{Q}{L}\right)^{1+\rho}}{\dfrac{\delta}{A^{\rho}}\left(\dfrac{Q}{K}\right)^{1+\rho}} = -\frac{(1-\delta)}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho} < 0$$

Şimdi de d^2K/dL^2 'ye bakalım:

$$\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{d(dK/dL)}{dL} = \frac{(1-\delta)(1+\rho)}{\delta}\frac{K^{1+\rho}L^{\rho}}{\left(L^{(1+\rho)}\right)^2} > 0$$

İkame esnekliği, göreli faktör fiyatlarındaki yüzde değişimin, sermaye ve işgücü ikamesinde yüzde olarak nasıl bir değişme olabileceğini, bir başka ifadeyle veri faktör fiyatlarında K ve L 'nin birbirini ne ölçüde ikame ettiklerini gösterir. Bunu CES için görelim:

$$\sigma = \frac{\dfrac{d(K/L)}{(K/L)}}{\dfrac{d(w/r)}{(w/r)}} = \frac{\dfrac{d(K/L)}{d(w/r)}}{\dfrac{(K/L)}{(w/r)}}$$

Genel olarak ikame esnekliği

Optimal girdi bileşimi sağlandığında, şu denge koşulunun geçerli olacağından hareket edelim:

$$\frac{Q_L}{Q_K} = \frac{w}{r} = \frac{(1-\delta)}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho}$$

Buradan optimal girdi oranını yazabiliriz:

$$\frac{K^*}{L^*} = \left(\frac{(1-\delta)}{\delta}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}$$

Her iki yanın önce logaritmasını, sonra da (w/r)'ye göre türevini alırsak, ikame esnekliğini elde ederiz.

$$\sigma = \frac{d \ln(K^*/L^*)}{d \ln(w/r)} = \frac{d(K^*/L^*)/(K^*/L^*)}{d(w/r)/(w/r)} = \frac{1}{1+\rho}$$

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, CES üretim fonksiyonunun ($\rho \to 0$ iken) özel bir biçimidir. Aşağıdaki işlemleri yaparak, bunu görelim:

$$Q = A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$\lim_{\rho \to 0}\left(Q\right) = \lim_{\rho \to 0}\left(A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}\right) = \frac{0}{0}$$

Belirsizliğini ortadan kaldırmak için, her iki yanın doğal logaritmasını alıp, L'Hopital kuralını kullanalım.

$$\ln\frac{Q}{A} = -\frac{\ln\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]}{\rho}$$

$$\left.\lim_{\rho\to 0}\left(\ln\frac{Q}{A}\right) = \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\dfrac{d\left(-\ln\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]\right)}{d\rho}}{\dfrac{d\rho}{d\rho}}\right)\right\}$$

L'Hopital kuralı uygulandı.

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\ln\frac{Q}{A}\right) = \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\delta\ln K + (1-\delta)\ln L}{1}\right) = \ln\left(K^{\delta}L^{1-\delta}\right)$$

$$\boxed{\lim_{\rho\to 0} Q = \lim_{\rho\to 0}\left(A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}\right) = AK^{\delta}L^{1-\delta}}$$